1. ТЕОРИЯ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ
1.1. Числовые последовательности

План
1. Числовая последовательность. Арифметические операции над ЧП
2. Ограниченные ЧП (сверху, снизу, с обеих сторон). Верхняя и нижняя грани ЧП
3. Неограниченные ЧП. Бесконечно большие ЧП
4. Бесконечно малые ЧП. ε-окрестность числа a
5. Теорема о сумме (разности) бесконечно малых ЧП
6. Теорема об ограниченности бесконечно малых ЧП
7. Теорема о произведении бесконечно малой и ограниченной ЧП
8. Теорема о бесконечно малой ЧП, все элементы которой постоянны
9. Теорема об обращении бесконечно большой и бесконечно малой ЧП

Понятие числовой последовательности (ЧП) является одним из важнейших в математическом анализе. В данной главе вводится понятие предела ЧП, которое позволяет определить и другие формы предельного перехода.

Если каждому числу n натурального ряда чисел $1, 2, \dots, n, \dots$ по определённому закону ставится в соответствие некоторое вещественное число x_n, то множество занумерованных чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \qquad (1.1)$$

называется **числовой последовательностью** (ЧП).

Числа x_n называются **элементами** или **членами ЧП**. Сокращённо ЧП (1.1) обозначается символом $\{x_n\}$.

Пусть имеются две ЧП $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, тогда
- **суммой** (**разностью**) этих ЧП называется последовательность, составленная из элементов $\{x_n \pm y_n\}$;
- **произведением** (**частным**) этих ЧП называется последовательность, составленная соответственно из элементов $\{x_n y_n\}$ и $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$.

Замечание. При определении частного двух ЧП все элементы y_n должны быть отличны от нуля.

ЧП $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху** (**снизу**), если существует такое вещественное число M (m), что каждый её элемент x_n удовлетворяет неравенству $x_n \le M$ $(x_n \ge m)$.

Это определение полностью аналогично определению ограниченного сверху (снизу) множества вещественных чисел.

Число M (m) называется **верхней (нижней) гранью** ЧП $\{x_n\}$.

Любая ограниченная сверху ЧП $\{x_n\}$ имеет бесконечное множество верхних граней. В самом деле, если M – верхняя грань, то

любое число $M^* > M$ тоже является верхней гранью. В условии $x_n \leq M$ в качестве M можно брать любую из верхних граней. Такие же замечания справедливы и для нижних граней ЧП.

ЧП $\{x_n\}$ называется **ограниченной с обеих сторон** (или просто **ограниченной**), если она ограничена и сверху и снизу, то есть существуют числа m и M такие, что любой элемент x_n удовлетворяет неравенствам $m \leq x_n \leq M$.

Если $\{x_n\}$ ограничена, M и m – её верхняя и нижняя грани, то все элементы x_n удовлетворяют неравенству:

$$|x_n| \leq A, \tag{1.2}$$

где A – максимальное из чисел $|M|$ или $|m|$. Обратно, если все элементы x_n удовлетворяют неравенству (1.2), то выполняются неравенства $-A \leq x_n \leq A$, и, следовательно, ЧП $\{x_n\}$ ограничена. Таким образом, неравенство (1.2) является другой формой условия ограниченности ЧП.

ЧП $\{x_n\}$ называется **неограниченной**, если для любого числа $A > 0$ найдётся элемент x_n, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$.

ЧП $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если для любого числа $A > 0$ (сколь бы велико оно ни было) можно указать номер $N(A)$ такой, что при $n \geq N(A)$ все элементы x_n удовлетворяют неравенству $|x_n| > A$.

Замечание. Очевидно, что любая бесконечно большая ЧП (ББЧП) является неограниченной, так как для любого $A > 0$ можно указать номер N такой, что при $n \geq N$ все $|x_n| > A$, а следовательно, $\forall A > 0$ найдётся по крайней мере один такой элемент x_n, что $|x_n| > A$.

Однако, неограниченная ЧП может и не быть ББЧП. Например, неограниченная ЧП $1,2,1,3,\dots,1,n,\dots$ не является ББЧП, поскольку при $A > 1$ неравенство $|x_n| > A$ не имеет места для всех x_n с нечётными номерами.

ЧП $\{\alpha_n\}$ называется **бесконечно малой** (БМЧП), если для любого числа $\varepsilon > 0$ (сколь бы мало оно ни было) можно указать номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n \geq N(\varepsilon)$ все элементы α_n удовлетворяют неравенству $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Примеры:

1) ЧП $q, q^2, \dots, q^n, \dots$ при $|q| > 1$ является ББЧП, а при $|q| < 1$ – БМЧП.

2) ЧП $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ есть БМЧП.

Теорема 1.1. Сумма двух БМЧП есть БМЧП.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – БМЧП, $\varepsilon > 0$, N_1 – номер, начиная с которого $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, N_2 – номер, начиная с которого $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$, то, обозначив через $N = \max(N_1, N_2)$, получим, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$. Это означает, что ЧП $\{\alpha_n + \beta_n\}$ является БМЧП. Теорема доказана.

Теорема 1.2. Разность двух БМЧП есть БМЧП.

Теорема доказывается аналогично предыдущей теореме.

Теорема 1.3. БМЧП ограничена.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ – БМЧП, $\varepsilon > 0$, N – номер, начиная с которого $|\alpha_n| < \varepsilon$. Обозначим через A наибольшее из следующих N чисел: $A = \max\{\varepsilon, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N-1}|\}$. Очевидно, $|\alpha_n| \leq A$, $\forall n$, что означает ограниченность ЧП. Теорема доказана.

Теорема 1.4. Произведение ограниченной ЧП на БМЧП представляет собой БМЧП.

Доказательство. Пусть ЧП $\{x_n\}$ ограничена, а $\{\alpha_n\}$ – БМЧП. Так как ЧП $\{x_n\}$ ограничена, то существует число $A > 0$ такое, что $|x_n| \leq A$, $\forall n$. Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$. Поскольку $\{\alpha_n\}$ – БМЧП, то для положительного числа ε/A можно указать номер N такой, что при $n \geq N$ будет выполняться неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon/A$. Тогда при $n \geq N$

$$|x_n\alpha_n| = |x_n||\alpha_n| < A\frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon.$$

Поэтому $\{x_n\alpha_n\}$ – БМЧП. Теорема доказана.

Следствие. Произведение любого числа БМЧП есть БМЧП.

Замечание. Частное двух БМЧП может быть последовательностью любого типа и даже может не иметь смысла.

Например, если бесконечно много элементов ЧП $\{\beta_n\}$ равны нулю, то частное $\{\alpha_n/\beta_n\}$ не имеет смысла.

Теорема 1.5. Если все элементы БМЧП $\{\alpha_n\}$ равны одному и тому же числу c, то $c = 0$.

Доказательство. Допустим, что $c \neq 0$. Положим $\varepsilon = |c|/2$, $\varepsilon > 0$. По определению БМЧП, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, должно выполняться неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$. Так как $\alpha_n = c$, $\varepsilon = |c|/2$, то последнее неравенство принимает вид: $|c| < |c|/2$. Полученное противоречие исчезает только при $c = 0$. Теорема доказана.

Теорема 1.6. Если $\{x_n\}$ – ББЧП, то, начиная с некоторого номера n, определена ЧП $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$, которая является БМЧП. Если все элементы БМЧП $\{\alpha_n\}$ не равны нулю, то ЧП $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ является ББЧП.

Доказательство. ББЧП может иметь лишь конечное число элементов, равных нулю. В самом деле, из определения ББЧП вытекает, что для данного числа $A > 0$ можно указать такой номер N^*, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n| > A$. Это означает, что при $n \geq N^*$ все элементы $x_n \neq 0$. Поэтому ЧП $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ имеет смысл, если её элементы рассматривать начиная с номера N^*.

Докажем теперь, что $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – БМЧП. Пусть $\varepsilon > 0$. Для числа $\frac{1}{\varepsilon}$ можно указать номер $N \geq N^*$ такой, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому, начиная с указанного номера N, будет выполняться неравенство $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$. Таким образом, доказано, что ЧП $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ есть БМЧП. Доказательство второй части теоремы проводится аналогично. Теорема доказана.

Основная литература:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Часть I. Учеб.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 648 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Часть II. Учеб.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие. – СПб., Изд-во «Профессия», 2005. – 432 с.

Дополнительная литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1,2,3. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 592 с.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Уч. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 656 с.